Polytech'Paris-Sud 2012-2013
Filière informatique apprentissage 2ème année

Analyse numérique

TP1: Approximation polynomiale par moindres carrés (utilisation de Matlab).

On considère une suite d'observations $b = \{b_i\}_{i=1,\cdots,m}$ dépendant des données $t = \{t_i\}_{i=1,\cdots,m}$ où les t_i's sont des nombres distincts.

Notre objectif est de trouver un polynôme

$$p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_{n-1} t^{n-1}$$

qui approxime au mieux les points $\{(t_i, b_i)\}_{i=1,\cdots,m}$ au sens des moindres carrés.

1. Exprimer le problème à résoudre sous la forme d'un problème de moindres carrés linéaire

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2\,,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m.$$

Vérifier que la solution est unique.

2. Exemple numérique:

Supposons que nous avons les données suivantes:

t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
b	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4

Pour différentes valeurs de n (de $n = 2$ à $n = 5$), calculer en utilisant la méthode des équations normales le polynôme $p(t)$ qui approxime au mieux les données fournies (solution x_{ne}).

Soit x_{qr} la solution obtenue en utilisant une factorisation QR. Pour chaque valeur de n, comparer les deux solutions x_{ne} et x_{qr} en calculant l'erreur relative $\frac{\|x_{qr}-x_{ne}\|_2}{\|x_{qr}\|_2}$ et observer la dépendance avec le conditionnement de A (instruction Matlab *cond*).